การประยุกต์ของปริพันธ์ บทที่ 6

Application of Integral

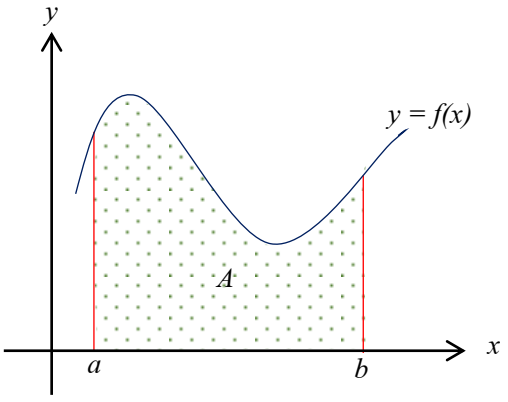
การประยุกต์ของปริพันธ์จะกล่าวถึงการนำไปประยุกต์ใช้ของการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งเกิดประโยชน์เป็นอย่างมากในการใช้งานจริง เช่น การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง การหาปริมาตรของทรงตันที่ไม่สามารถคำนวณหาได้จากสูตรใด ๆ ตามปกติ โดยใช้วิธีจานและวิธีเปลือกทรงกระบอก เป็นส่วนหนึ่งในการแก้ปัญหาเชิงวิศวกรรมหรือฟิสิกส์ ภายใต้การใช้ปริพันธ์แบบจำกัดเขต

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจและสามารถหาปริพันธ์จำกัดเขตได้
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้

6.1 การหาปริพันธ์จำกัดเขต (Definite integral)

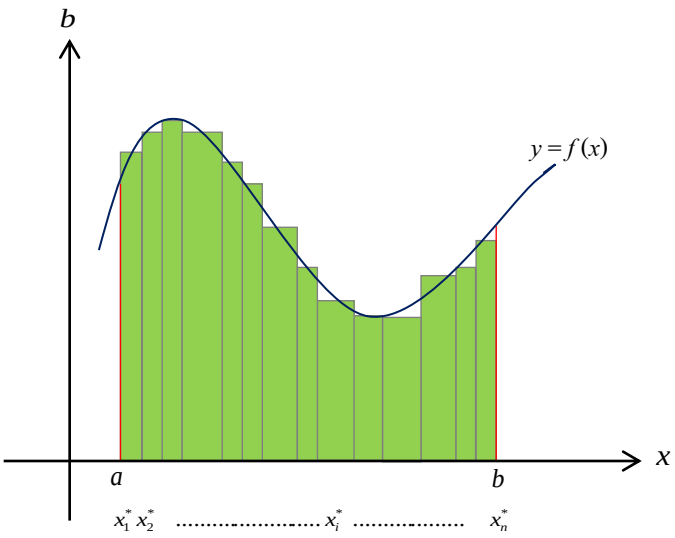
ถ้าต้องการคำนวณหาพื้นที่ A เหนือบนแกน x ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = a$, $x = b$ และเส้นโค้ง $y = f(x) > 0$ จะมีความต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ดังรูปที่ 6.1 ซึ่งสามารถแบ่งระหว่างช่วงนี้ออกเป็นช่วงย่อย ๆ จำนวน n ช่วง โดยแต่ละช่วงย่อยนั้น ไม่จำเป็นที่จะต้องมีความยาวหรือความกว้างที่เท่ากันทั้งหมด



รูปที่ 6.1 พื้นที่ A ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงและเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ถ้ากำหนดให้จุดแบ่งช่วงเป็น $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n = b$ และเลือกจุดที่อยู่ในแต่ละช่วงย่อย กำหนดให้เป็น $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*$ โดยที่ $i = 1,2,3,\ldots,n$ ซึ่งสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วงย่อย n เป็นจำนวน n ช่วง ดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 สี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วงย่อย n จำนวน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก ๆ จำนวน n รูป จะเป็นค่าโดยประมาณของพื้นที่ A ดังนี้

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_i^*)\Delta x_i + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n \quad \text{หรือ}$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

ซึ่งเรียกผลบวกนี้ว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ถ้าช่วง $[a,b]$ ถูกแบ่งเป็นช่วงเล็ก ๆ มีจำนวนมากที่สุดเมื่อ $n \to \infty$ ซึ่งจะทำให้ความกว้าง Δx_i ของสี่เหลี่ยมมุมฉากมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta x_i \to 0$ และถ้าสามารถหาค่าลิมิตของผลบวกรีมันน์นี้ได้ จะได้พื้นที่ A มีค่าดังนี้

$$A \approx \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

โดยเรียกค่าผลบวกรีมันน์นี้ว่า ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ จากขอบเขต a ไปถึง b และใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ เขียนแทนค่าลิมิตของผลบวกรีมันน์

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

นิยาม ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น ปริพันธ์จำกัดเขตจาก a ไปถึง b นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

โดยที่ $\int$ คือ เครื่องหมายปริพันธ์

$f(x)$ คือ ตัวถูกปริพันธ์ (Integrand)

dx คือ ปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x

a คือ ลิมิตล่าง (Lower limit) ของการปริพันธ์

b คือ ลิมิตบน (Upper limit) ของการปริพันธ์

เมื่อกำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ หาค่าได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = f(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ซึ่ง $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในช่วง $[a,b]$

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอยู่ในช่วง $[a,b]$ และมี c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้วสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขตที่สำคัญมีดังนี้

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$ เมื่อ $a < c < b$

ตัวอย่าง 6.1 จงหาค่า $\int_1^2 (4x^3 + 1)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (4x^3+1)dx &= \left[\frac{4x^4}{4} + x\right]_1^2 \\
&= \left[x^4 + x\right]_1^2 \\
&= (2^4+2) - (1^4+1) \\
&= (16+2) - (1+1) \\
&= 18 - 2 = 16
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาค่า $\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx &= \int_{-1}^0 e^{2x}\,\frac{d(2x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{2x}\,d(2x) \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-1}^0
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{2(0)} - e^{2(-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{0} - e^{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2}}$$

ตัวอย่าง 6.3 จงหาค่า $\int_{0}^{2} \frac{x^{3}}{\left(x^{4}-2\right)^{2}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_{0}^{2} \frac{x^{3}}{\left(x^{4}-2\right)^{2}}\,dx = \int_{0}^{2} \left(x^{4}-2\right)^{-2} x^{3}dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left(x^{4}-2\right)^{-2} \frac{d\left(x^{4}-2\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{2} \left(x^{4}-2\right)^{-2} d\left(x^{4}-2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\left(x^{4}-2\right)^{-1}}{-1}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^{4}-2}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4}-2} - \frac{1}{0^{4}-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{14} - \frac{1}{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{8}{14}\right)$$

$$= -\frac{1}{7}$$

ตัวอย่าง 6.4 จงหาค่า $\int_0^4 f(x)dx$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & ,0\le x<3\\ \dfrac{1}{x-2} & ,x\ge 3\end{cases}$

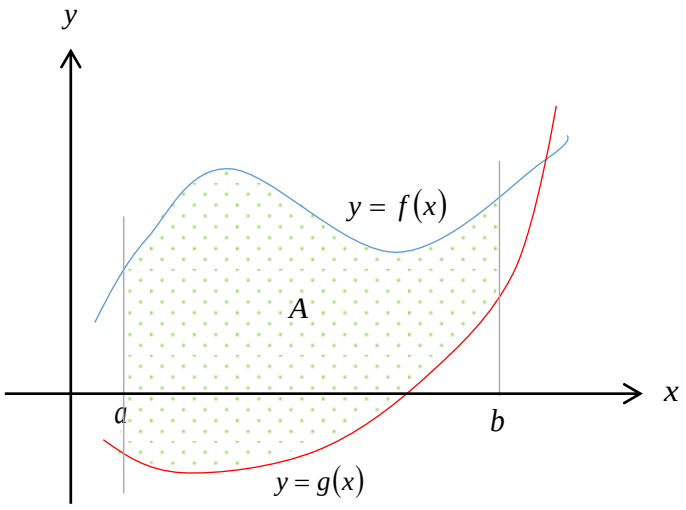
<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{x+1}\,d(x+1) + \int_3^4 \frac{1}{x-2}d(x-2) \\
&= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]_0^3 + \left[\ln|x-2|\right]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^3 + \left[\ln|x-2|\right]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3+1}}-\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right)+\left(\ln|4-2|-\ln|3-2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\left(\ln|2|-\ln|1|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\ln 2-0\right) \\
&= -\frac{1}{4}+\ln 2
\end{aligned}$$

6.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area between curves)

ในการหาพื้นที่ซึ่งเป็นการประยุกต์ของการปริพันธ์จำกัดเขต สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ โดยพื้นที่นั้นอาจจะเป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งหรือเส้นตรงต่าง ๆ พิจารณาได้ตามกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$และ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้น พื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

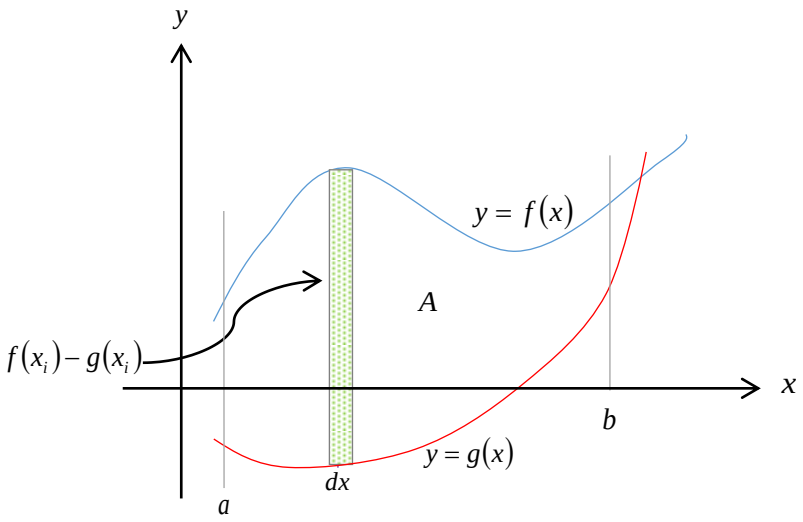
<u>ขั้นตอนการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง</u>

1. เขียนเส้นโค้งของฟังก์ชันและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อให้เห็นพื้นที่ที่ต้องการ ซึ่งจะหาได้อย่างชัดเจนว่าอยู่ในลักษณะแบบใด

2. ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดค่าจำกัดเขตล่างและค่าจำกัดเขตบนของปริพันธ์มาให้ จะต้องทำการพิจารณาเตรียมไว้ เพื่อคำนวณค่าพื้นที่จากการปริพันธ์ของขอบเขตได้

3. สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก ลงในบริเวณพื้นที่ A ที่ต้องการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

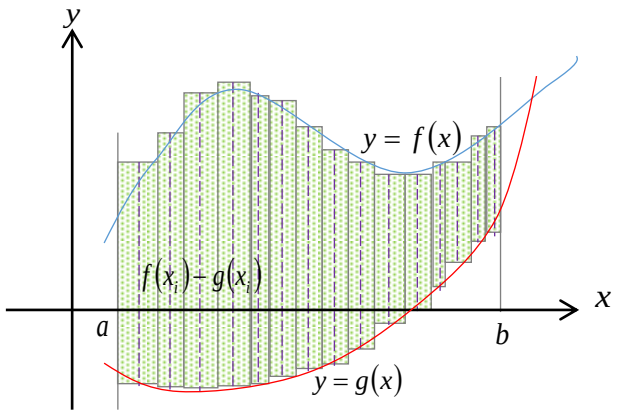
ในกรณีนี้ เมื่อโจทย์กำหนด $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ให้สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน x โดยความกว้างสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น dx และความสูงของสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น $f(x) - g(x)$ ดังรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อทำการเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน x จะได้เต็มอาณาบริเวณพื้นที่ ซึ่งแสดงว่าสามารถหาพื้นที่ได้ทั้งหมดดังรูปที่ 6.5

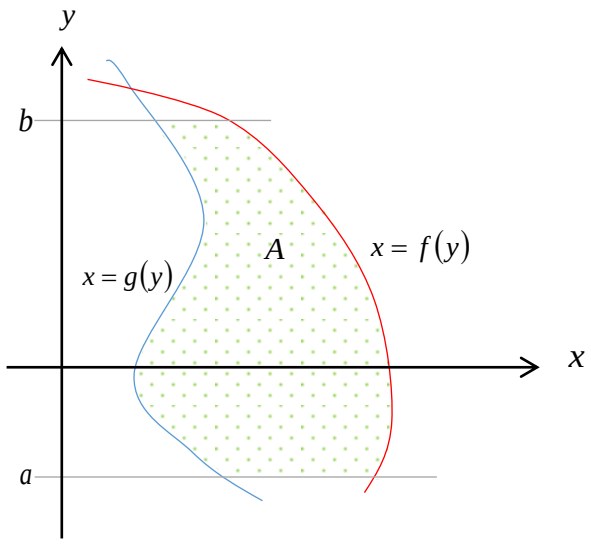


รูปที่ 6.5 การเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น พื้นที่ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

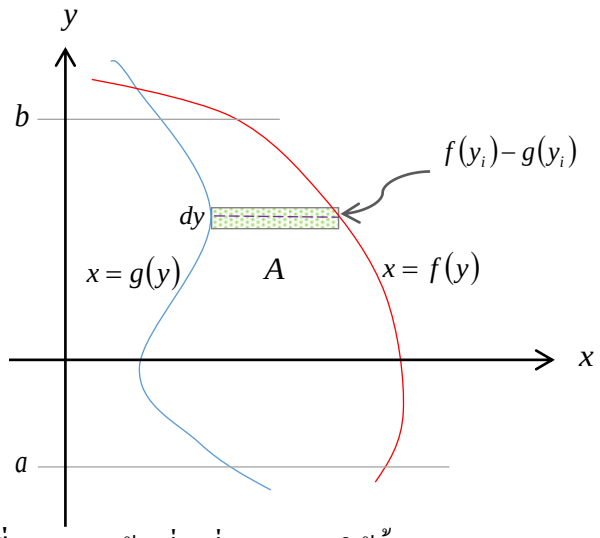
กรณีที่ 2 ถ้า $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$และ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับทุกค่าของ y ดังนั้น พื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง $x = f(y)$, $x = g(y)$ เส้นตรง $y = a$ และ $y = b$ ดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

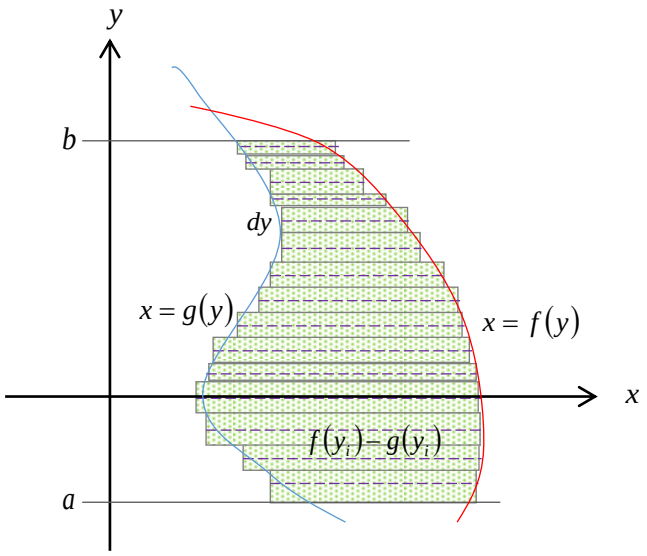
ในกรณีนี้ เมื่อโจทย์กำหนด $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ ให้สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งฉากกับแกน y โดยความกว้างสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น dy และความกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น $f(y) - g(y)$ ดังรูปที่ 6.7



รูปที่ 6.7 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อทำการเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ไปตามแกน y จะได้เต็มอาณาบริเวณพื้นที่ ซึ่งแสดงว่าสามารถหาพื้นที่ได้ทั้งหมดดังรูปที่ 6.8

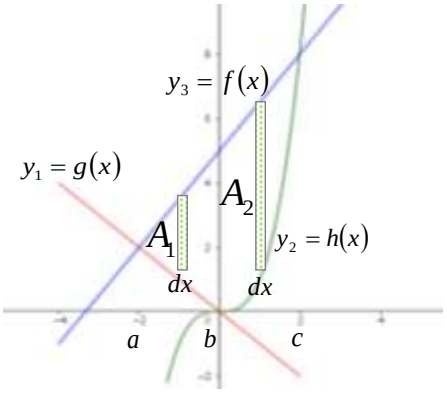


รูปที่ 6.8 การเลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น พื้นที่ $A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

หมายเหตุ หากเกิดกรณีที่ไม่เป็นไปตาม 2 กรณี ดังที่กล่าวมา มีความจำเป็นจะต้องแบ่งการหาพื้นที่ออกเป็นส่วน ๆ ดังรูปที่ 6.9 และนำพื้นที่ทั้งหมดนั้นมารวมกันตามขั้นตอน เช่น



ดังนั้น จะได้ขนาดพื้นที่ $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_a^b (y_3 - y_1)dx + \int_b^c (y_3 - y_2)dx$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (f(x) - h(x))dx$$

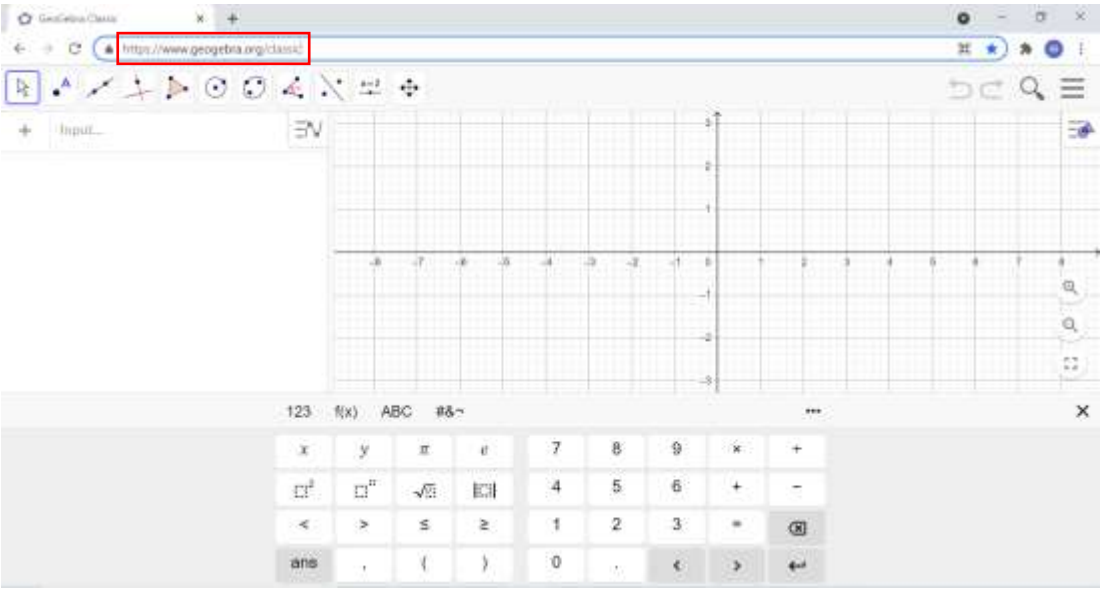
รูปที่ 6.9 พื้นที่ทั้งหมดจากการรวมกันของ A_1 และ A_2

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูปที่ 6.9 เป็นการวาดกราฟแบบออนไลน์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra Classic ใช้สำหรับวาดกราฟฟรี ใช้งานง่าย ไม่จำเป็นต้องติดตั้งในคอมพิวเตอร์ เปิดได้จากที่อยู่เว็บไซต์ https://www.geogebra.org/classic จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับการศึกษา ควบคู่กับการเรียนทางทฤษฎี เพื่อใช้วาดกราฟจากฟังก์ชันของสมการในรูปแบบต่าง ๆ ได้ เช่น กราฟจากฟังก์ชันเส้นตรง พาราโบลา ฯ จะได้ลักษณะกราฟที่สวยงาม และตั้งค่าสีสันในแต่ละองค์ประกอบของกราฟได้ ทั้งยังมีแอปพลิเคชัน (Application) ของ GeoGebra หรือ GeoGebra Application ที่สามารถดาวน์โหลดตามสัญลักษณ์ เพื่อการใช้งานสะดวกผ่านทางสมาร์ทโฟน (Smartphone) หรือแท็บเล็ต (Tablet) ควบคู่ในระหว่างการศึกษาในห้องเรียน ซึ่งเป็น Open source software เป็นซอฟต์แวร์ที่เปิดเผยต่อสาธารณชน ให้สิทธิเสรีแก่ผู้ที่จะนำไปใช้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ

ขั้นตอนการใช้ GeoGebra บนเว็บไซต์

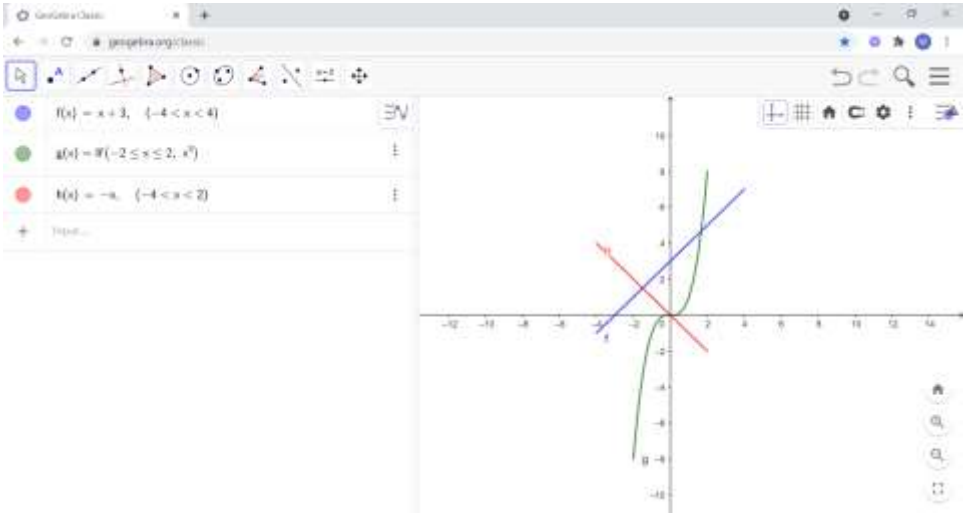
1. เปิด GeoGebra Classic



รูปที่ 6.10 เว็บไซต์ GeoGebra Classic

ที่มา: https://www.geogebra.org/classic (2564)

2. พิมพ์ฟังก์ชันเพื่อวาดกราฟ



รูปที่ 6.11 การวาดกราฟบนเว็บไซต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ขั้นตอนการใช้ GeoGebra Classic Application

1. ค้นหาคำว่า GeoGebra Classic โดยทำการติดตั้งได้ทั้งระบบ Android บนอุปกรณ์ของแบรนด์ทั่วไป หรือระบบ iOS ซึ่งเป็นระบบปิดที่ใช้งานได้เฉพาะกับโทรศัพท์ Apple หรือ Ipad

รูปที่ 6.12 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application

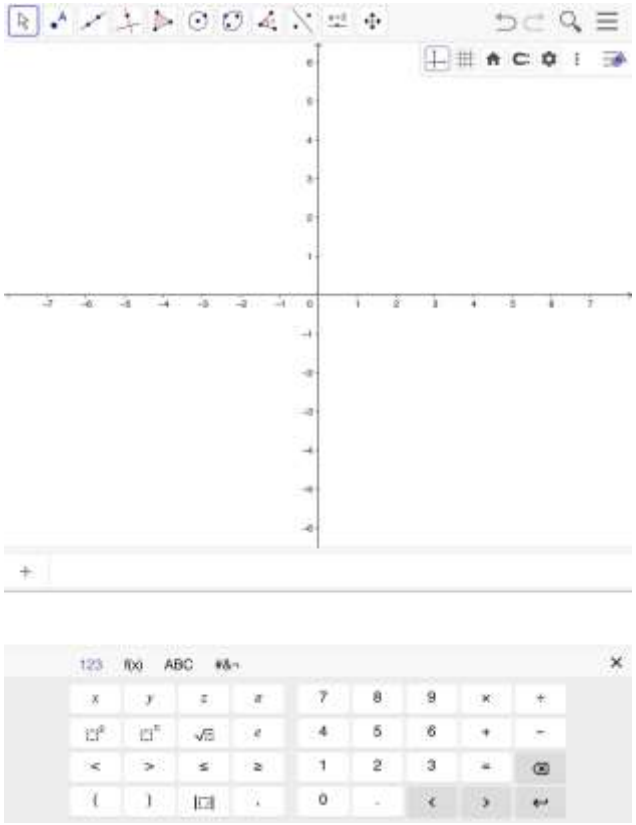
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. เมื่อทำการติดตั้งเสร็จสมบูรณ์ของ GeoGebra Classic Application ดังรูป

รูปที่ 6.13 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application เสร็จสมบูรณ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

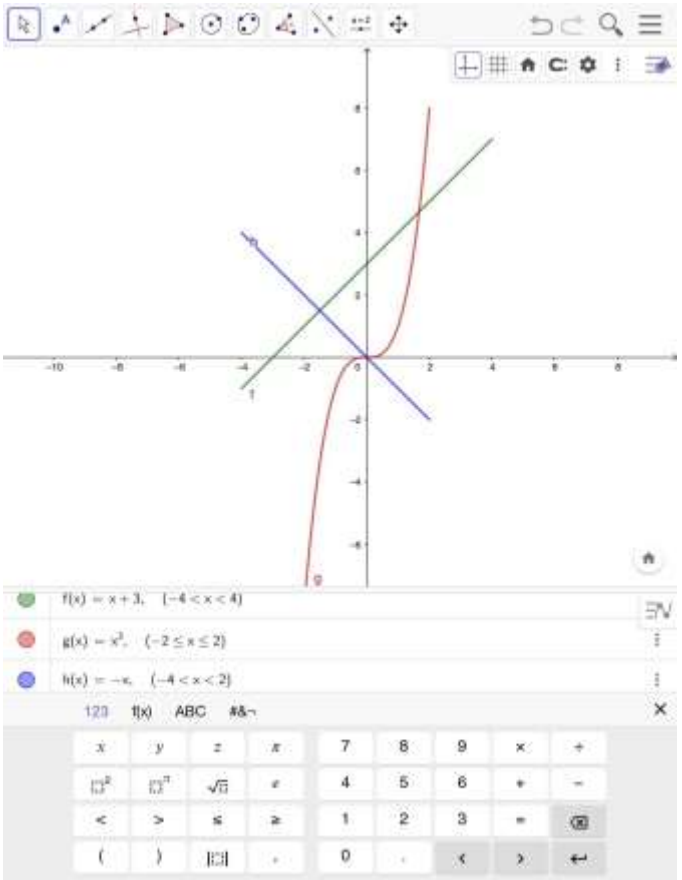
3. สามารถเปิดการใช้งาน GeoGebra Classic Application ได้ดังรูป



รูปที่ 6.14 GeoGebra Classic Application

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. พิมพ์ฟังก์ชันเพื่อวาดกราฟได้ดังรูปบน GeoGebra Classic Application



รูปที่ 6.15 การวาดกราฟบน GeoGebra Classic Application

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

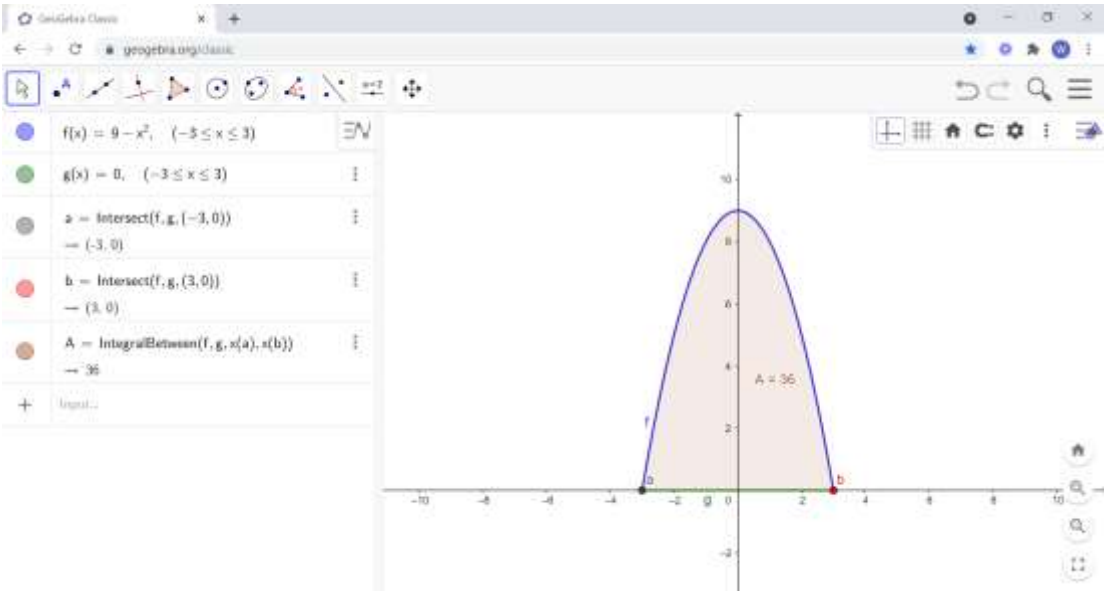
ตัวอย่าง 6.5 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และแกน x โดย $-3 \le x \le 3$

<u>วิธีทำ</u> ทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 วาดรูปจากโจทย์

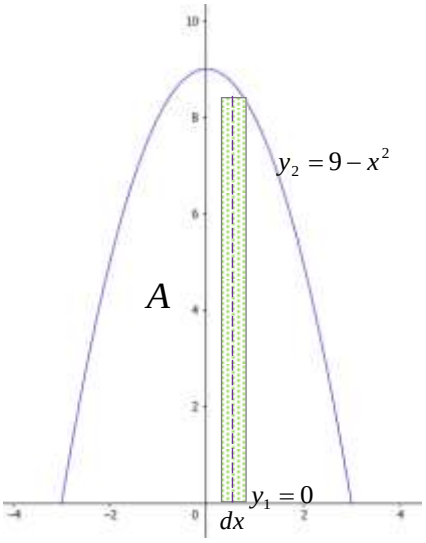
- เส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ ได้รูปพาราโบลาคว่ำ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,9)$
- แกน x โดย $-3 \le x \le 3$

แคลคูลัส 1



รูปที่ 6.16 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)



รูปที่ 6.17 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

$$= \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2 - 0\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)dx$$

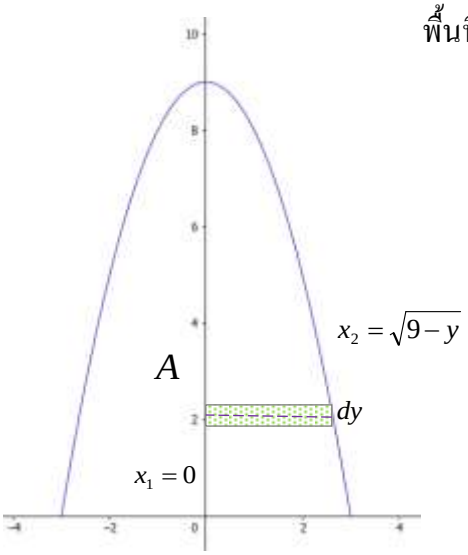
$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$= (27 - 9) - (-27 + 9) = 18 - (-18)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.18 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y} - 0\right)dy$$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y}\right)dy = 2\int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} \frac{d(9-y)}{-1}$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = -\frac{4}{3}\left[(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$= -\frac{4}{3}\left((9-9)^{\frac{3}{2}} - (9-0)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(27)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.6 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ เส้นตรง $y = 4x$ และอยู่ในจตุภาคที่ 1

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = 4x$ (2)

หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

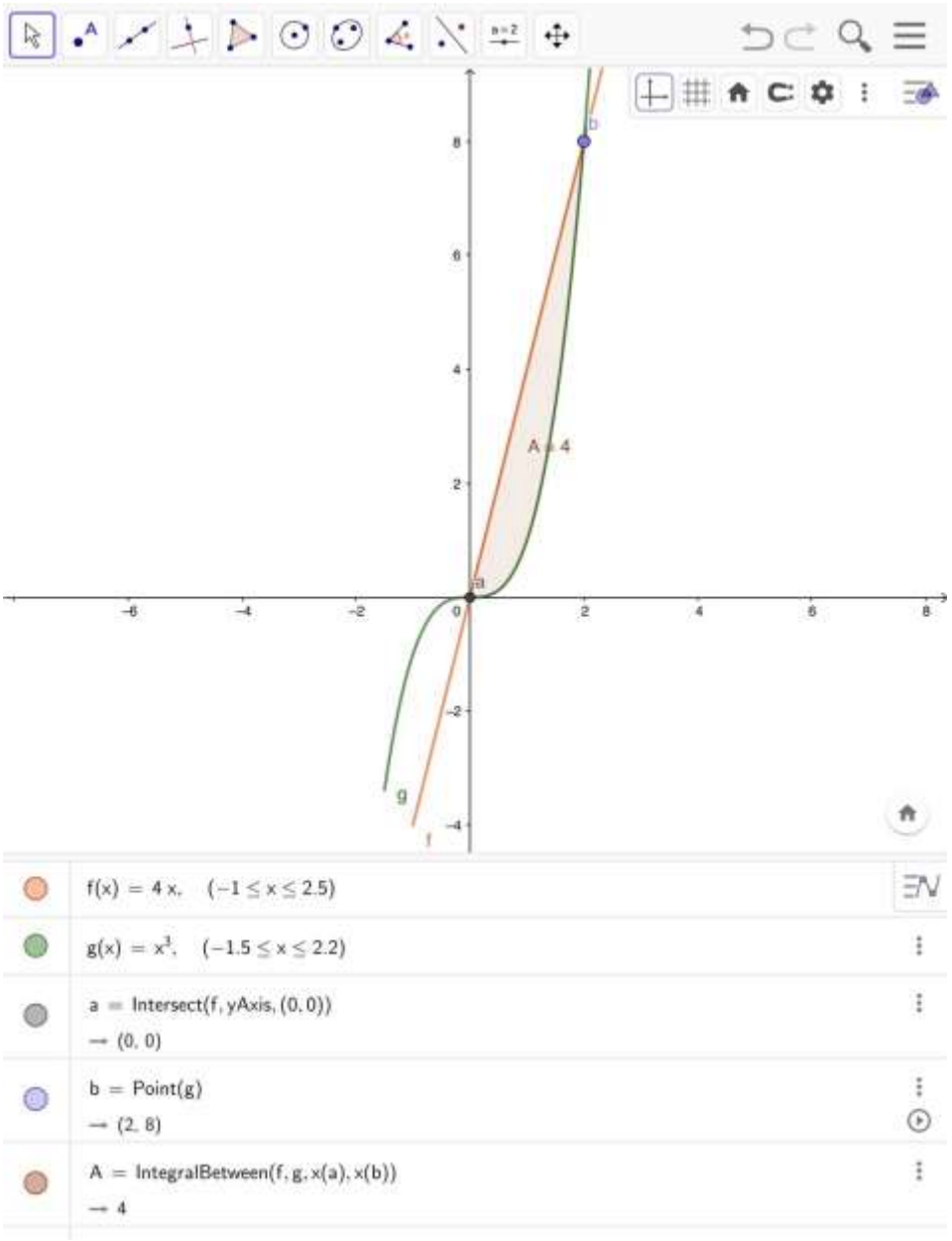
$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

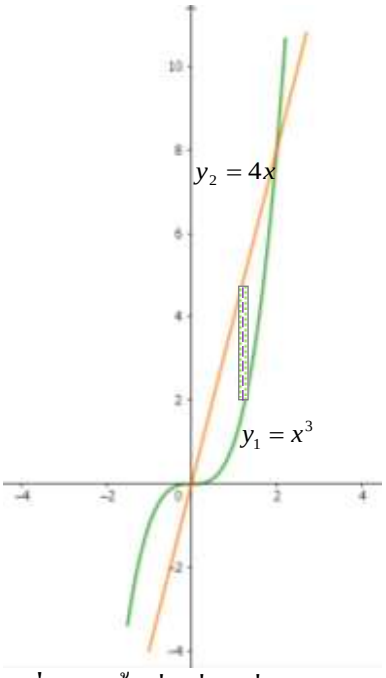
$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore\ x = 0, 2$$



รูปที่ 6.19 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และเส้นตรง $y = 4x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)



รูปที่ 6.20 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เนื่องจาก $x = -2$ ไม่ได้อยู่ในจตุภาคที่ 1

และมีจุดตัดอยู่ที่ $(0,0)$ และ $(2,8)$

วิธีที่ 1

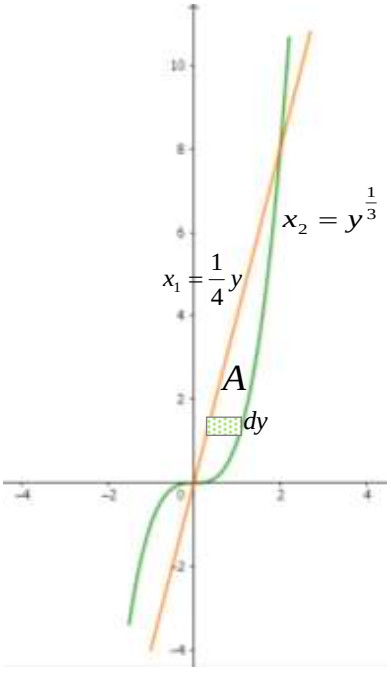
พื้นที่ $A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

$$= \int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \left(2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right) - \left(2(0)^2 - \frac{(0)^4}{4}\right)$$

$= (8-4) - 0 = 4$ ตารางหน่วย



รูปที่ 6.21 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วิธีที่ 2

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= \int_0^8 \left(y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}y\right)dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}y^2\right]_0^8$$

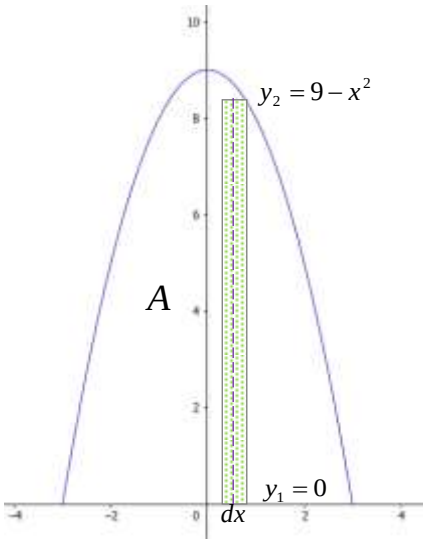
$$= \left(\frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(8)^2\right) - \left(\frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(0)^2\right)$$

$= (12-8) - 0 = 4$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.5 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และแกน x จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1



รูปที่ 6.22 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ ได้รูปพาราโบลาคว่ำ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,9)$
- แกน x จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$

พื้นที่ $A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

$$= \int_{-3}^{3} (9 - x^2 - 0)dx$$

$$= \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx$$

$$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

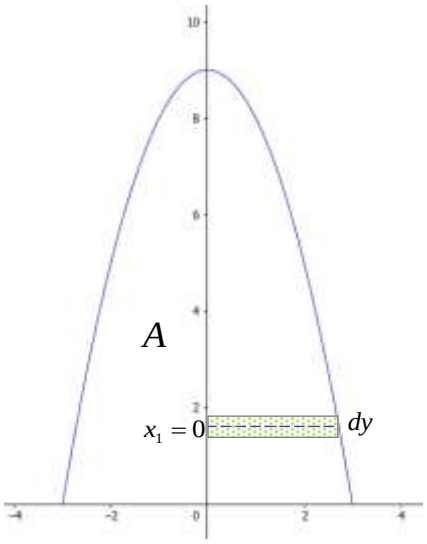
$$= \left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$= (27 - 9) - (-27 + 9)$$

$$= 18 - (-18)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.23 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y} - 0\right)dy$$

$$= 2\int_0^9 \left(\sqrt{9-y}\right)dy = 2\int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} \frac{d(9-y)}{-1}$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = -\frac{4}{3}\left[(9-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$= -\frac{4}{3}\left((9-9)^{\frac{3}{2}} - (9-0)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}\right)$$

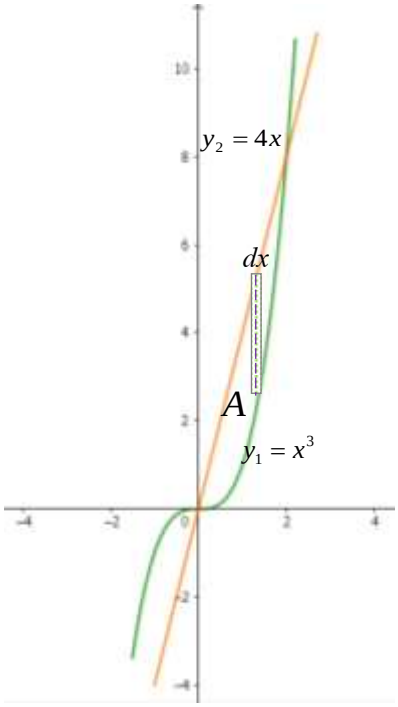
$$= \frac{4}{3}(27)$$

$= 36$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.6 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$, เส้นตรง $y = 4x$ และอยู่ในจตุภาคที่ 1

<u>วิธีทำ</u> สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1



รูปที่ 6.24 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = 4x$ (2)

หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

$$x^3 = 4x$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$\therefore\ x = 0, 2$$

เนื่องจาก $x = -2$ ไม่ได้อยู่ในจตุภาคที่ 1 และมีจุดตัดอยู่ที่ $(0,0)$ และ $(2,8)$

พื้นที่ $A = \int_a^b [y_2 - y_1]dx$

$$= \int_0^2 (4x - x^3)dx$$

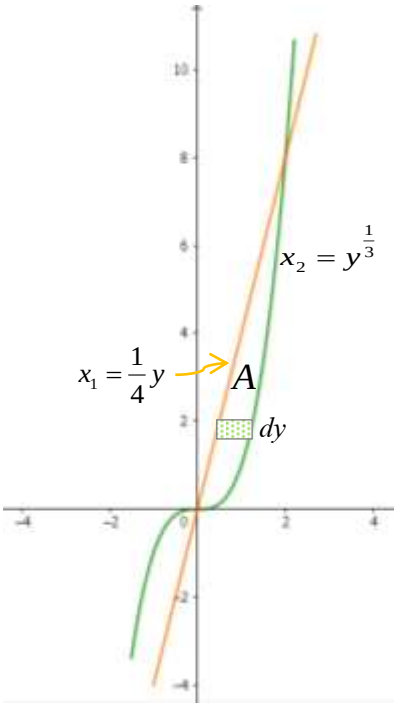
$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \left(2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right) - \left(2(0)^2 - \frac{(0)^4}{4}\right)$$

$$= (8-4) - 0$$

$= 4$ ตารางหน่วย

วิธีที่ 2



รูปที่ 6.25 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

พื้นที่ $A = \int_a^b [x_2 - x_1]dy$

$$= \int_0^8 \left(y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}y \right) dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}y^2 \right]_0^8$$

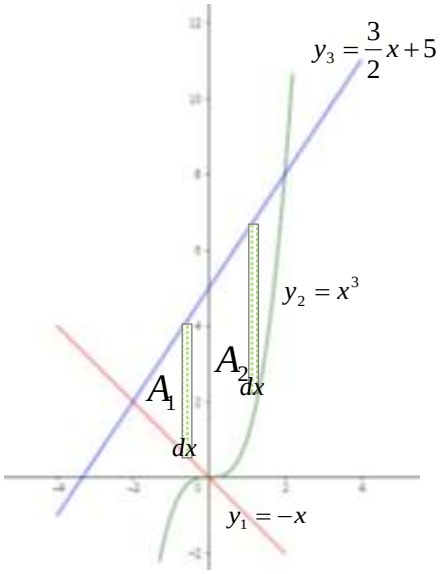
$$= \left(\frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(8)^2 \right) - \left(\frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{8}(0)^2 \right)$$

$$= (12 - 8) - 0$$

$= 4$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 6.7 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$, เส้นตรง $y = -x$ และเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x + 5$

<u>วิธีทำ</u>



วาดรูปจากโจทย์

- เส้นโค้ง $y = x^3$ (1)
- เส้นตรง $y = -x$ (2)
- เส้นตรง $y = \frac{3}{2}x + 5$ (3)

รูปที่ 6.26 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (2)

$$x^3 = -x$$

$$x^3 + x = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore\ x = 0$$

แทน $x = 0$ ในสมการที่ (1) หรือ (2) จะได้จุดตัดที่ $(0,0)$

2. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (1) และ (3)

$$x^3 = \frac{3}{2}x + 5$$

$$\therefore\ x = 2$$

แทน $x = 2$ ในสมการที่ (1) หรือ (3) จะได้จุดตัดที่ $(2,8)$

3. หาจุดตัดได้จากสมการที่ (2) และ (3)

$$-x = \frac{3}{2}x + 5$$

$$\therefore\ x = -2$$

แทน $x = -2$ ในสมการที่ (2) หรือ (3) จะได้จุดตัดที่ $(-2, 2)$

ดังนั้น จะได้ขนาดพื้นที่ $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_a^b (y_3 - y_1)dx + \int_b^c (y_3 - y_2)dx$$

$$= \int_{-2}^{0}\left[\left(\frac{3}{2}x + 5\right) - (-x)\right]dx + \int_0^2\left[\left(\frac{3}{2}x + 5\right) - (x^3)\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{5}{2}x + 5\right)dx + \int_0^2\left(-x^3 + \frac{3}{2}x + 5\right)dx$$

$$= \left[\frac{5}{4}x^2 + 5x\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^2 + 5x\right]_0^2$$

$$= \left(0 - \left(\frac{5}{4}(-2)^2 + 5(-2)\right)\right) + \left(\left(-\frac{(2)^4}{4} + \frac{3}{4}(2)^2 + 5(2)\right) - 0\right)$$

$$= 0 - (5 - 10) + ((3 + 10 - 4) - 0)$$

$$= 5 + 9$$

$$= 14 \text{ ตารางหน่วย}$$

6.3 ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน (Volume of solid of revolutions)

ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน หมายถึง ปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกนหนึ่ง (แกน x หรือ แกน y)

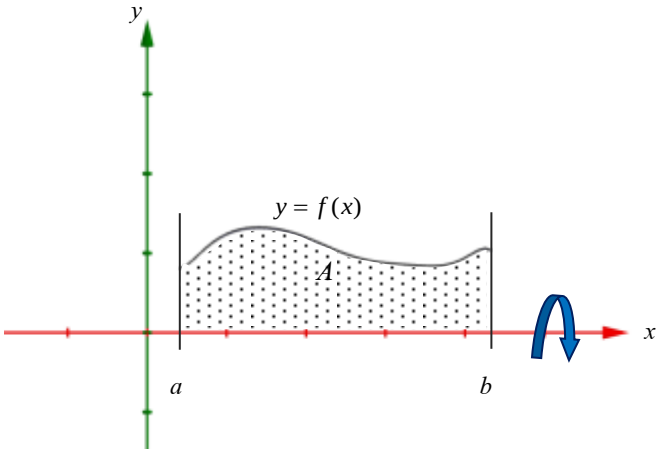
การหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนมี 2 วิธี คือ วิธีจาน (Disk method) และวิธีเปลือกทรงกระบอก (Cylindrical shell method)

6.3.1 การหาปริมาตรของทรงตันโดยใช้วิธีจาน

เป็นวิธีการหาปริมาตรของทรงตันโดยตัดทรงตันเป็นแผ่น ๆ ให้ตั้งฉากกับแกนหมุน ซึ่งจะได้พื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมเสมอ และมีลักษณะคล้ายจาน โดยที่จานจะมีขนาดต่างกันไปในแต่ละแผ่น แต่ขอบของจานยังคงเป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งเส้นเดิมตลอด

<u>กรณีที่ 1</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x

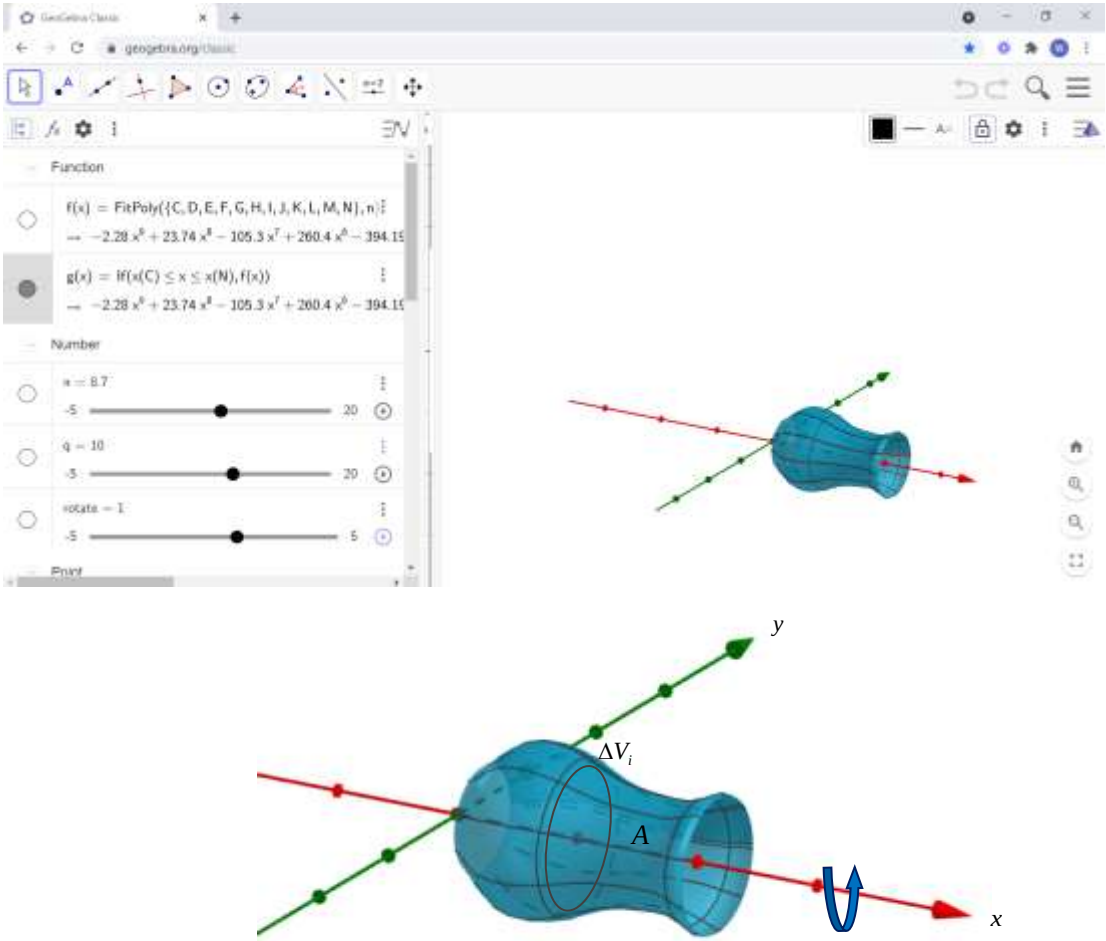
ให้ $y = f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $y = 0$ หรือแกน x ซึ่งเป็นแกนการหมุน และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 6.27



รูปที่ 6.27 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย x เป็นแกนการหมุน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

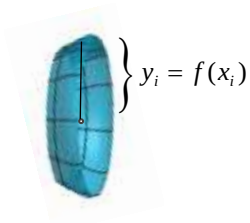
ให้ V เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน x (แกน x คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x ดังรูปที่ 6.28



รูปที่ 6.28 ปริมาตรของรูปทรงตัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โดยแต่ละแผ่นของพื้นที่หน้าตัดทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน x เป็นวงกลม และรัศมี $y = f(x)$ ดังรูปที่ 6.29



รูปที่ 6.29 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อถูกแบ่งจากทรงตันเป็น n แผ่นบาง ๆ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ รอบแกน x และมีความกว้างหรือความหนาเป็น Δx_i ของแต่ละส่วนเท่า ๆ กัน นั่นคือ $\Delta x_i = \dfrac{b_i - a_i}{n}$ ซึ่งหาปริมาตรส่วนที่ i คือ

$$\Delta V_i = \pi y_i^2 \Delta x_i$$

สูตรปริมาตรทรงกระบอก = (พื้นที่หน้าตัด) × (ความกว้างหรือความหนา)

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

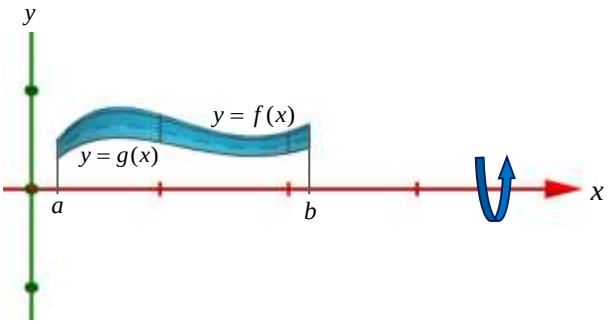
$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

ในกรณีที่แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ส่วน และให้ $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$ จะได้

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i \\ &= \int_a^b \pi y^2 dx \\ \therefore V &= \int_a^b \pi \left(f(x) \right)^2 dx \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบ แต่แกนหมุนไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของขอบพื้นที่ โดยยึดแกนหมุนกับแกน x

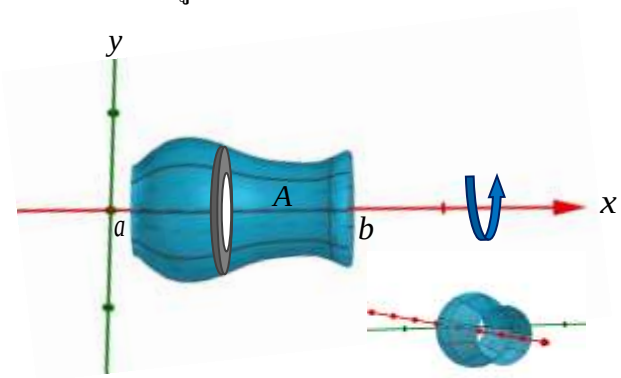
ให้ $y = f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 6.30



รูปที่ 6.30 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

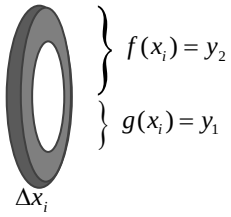
เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน x (แกน x คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x ดังรูปที่ 6.31



รูปที่ 6.31 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สูตรพื้นที่ของวงแหวน = π (รัศมีวงนอก)$^2 - \pi$ (รัศมีวงใน)^2 ดังรูปที่ 6.32



รูปที่ 6.32 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่าแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน x เป็นวงกลม คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi(y_2)^2 - \pi(y_1)^2 \\ &= \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2 \end{aligned}$$

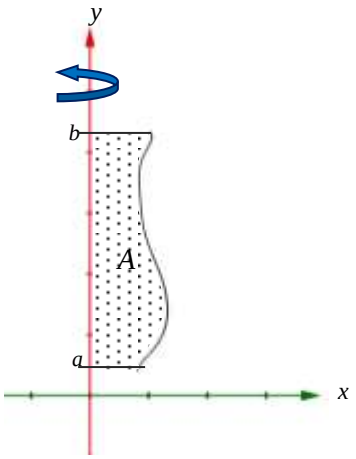
ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \int_a^b \left[(y_2)^2 - (y_1)^2\right] dx$$

$$\therefore V = \int_a^b \left(\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2\right) dx$$

<u>กรณีที่ 3</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน y

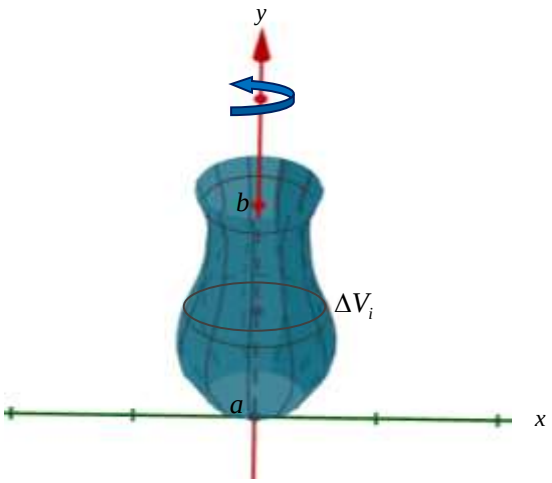
ให้ $x = f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ เส้นตรง $x = 0$ หรือแกน y ซึ่งเป็นแกนการหมุน และปิดล้อมด้านข้างด้วยเส้นตรง $y = a$ และ $y = b$ ดังรูปที่ 6.33



รูปที่ 6.33 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย y เป็นแกนการหมุน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y ดังรูปที่ 6.34



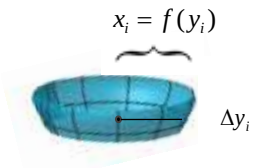
รูปที่ 6.34 ปริมาตรของรูปทรงตัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โดยแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน y คือ

$$A(y) = \pi[f(y)]^2$$

ดังแสดงรูปที่ 6.35



รูปที่ 6.35 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

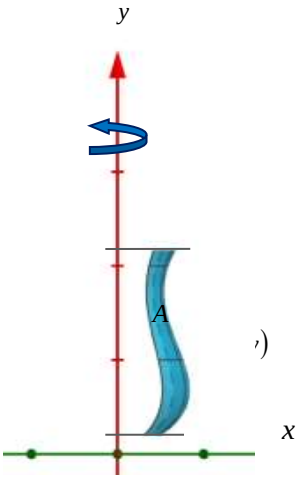
ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

$$\therefore V = \int_a^b \pi(f(y))^2 dy$$

<u>กรณีที่ 4</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบ แต่แกนหมุนไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของขอบพื้นที่ โดยยึดแกนหมุนกับแกน y

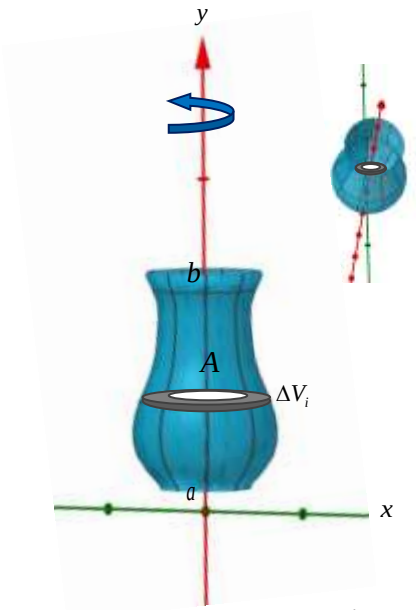
ให้ $x = f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ และ $y = b$ ดังรูปที่ 6.36



รูปที่ 6.36 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เมื่อหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y ดังรูปที่ 6.37



รูปที่ 6.37 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y

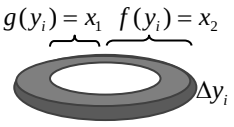
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่าแต่ละพื้นที่หน้าตัดของทรงตัน เมื่อตัดตั้งฉากกับแกน y เป็นวงแหวน คือ

$$A(y) = \pi(x_2)^2 - \pi(x_1)^2$$

$$= \pi(f(y))^2 - \pi(g(y))^2$$

ดังแสดงรูปที่ 6.38



รูปที่ 6.38 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V = \int_a^b \left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] dy$$

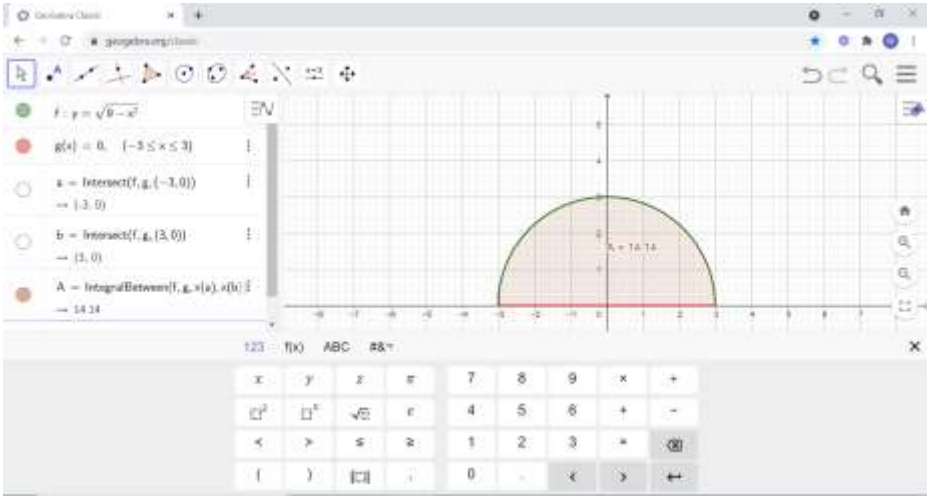
$$\therefore V = \int_a^b \left(\pi[f(y)]^2 - \pi[g(y)]^2\right) dy$$

<u>สรุปขั้นตอนในการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุน</u>

1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่
3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i
4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V
5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทนค่าของการจำกัดขอบเขต

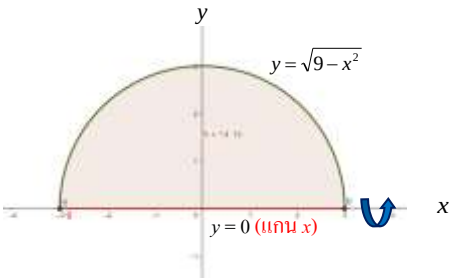
ตัวอย่าง 6.8 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{9 - x^2}$ และแกน x โดยหมุนรอบแกน x

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้



รูปที่ 6.39 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน x โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

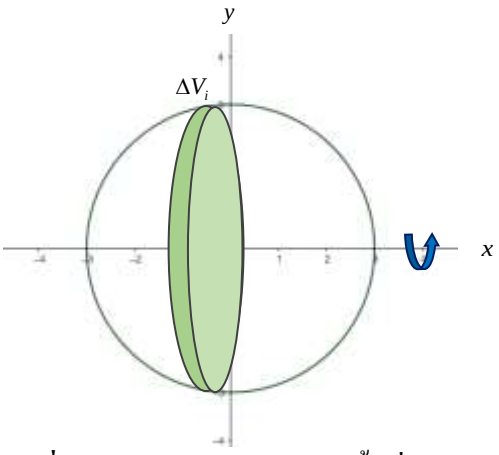
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)



รูปที่ 6.40 รูปพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

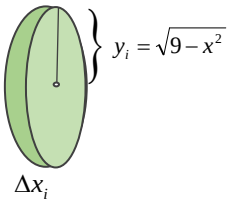
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่



รูปที่ 6.41 การตัดของการหมุนพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i



รูปที่ 6.42 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V

$$V = \int_{-3}^{3} \pi y^2 dx$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_{-3}^{3} \pi\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \pi(9-x^2)\,dx$$

$$= \pi\int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \pi\left[\left(9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right) - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(27 - \frac{27}{3}\right) - \left(-27 - \frac{(-27)}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[(27-9) - (-27+9)\right]$$

$$= \pi\left[18 - (-18)\right]$$

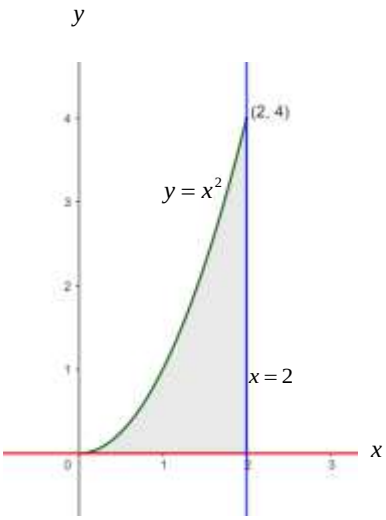
$$= \pi(18+18)$$

$= 36\pi$ ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 6.9 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 2$ และแกน x โดย 1) หมุนรอบแกน x และ 2) หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

1) หมุนรอบแกน x

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้



การหาจุดตัดของเส้นโค้งและเส้นตรง

จากสมการเส้นโค้ง $y = x^2$ (1)

เส้นตรง $x = 2$ (2)

แทนค่า $x = 2$ ในสมการที่ (1)

ดังนั้น $y = (2)^2$

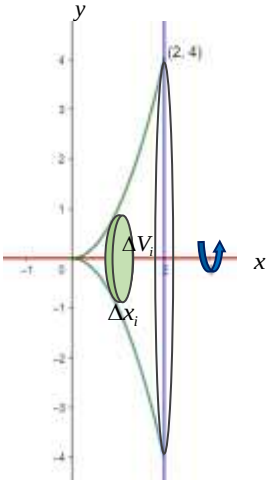
$y = 4$

จุดตัดของเส้นโค้งและเส้นตรงคือ $(2,4)$

รูปที่ 6.43 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

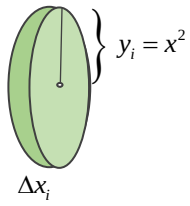
2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่



รูปที่ 6.44 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i



รูปที่ 6.45 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด

$$V = \int_0^2 \pi y^2 dx$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{2^5}{5} - 0 \right]$$

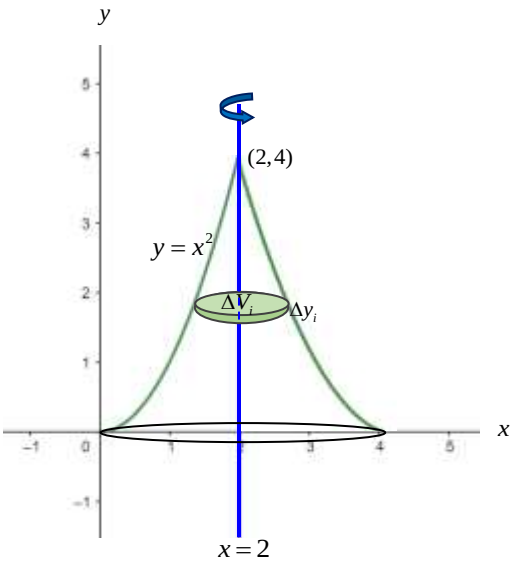
$$= \pi \left(\frac{32}{5} \right)$$

$$= \frac{32}{5}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

2) หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

<u>วิธีทำ</u> 1. วาดรูปของพื้นที่จากโจทย์ที่กำหนดให้

2. วาดรูปที่เกิดจากการตัดของการหมุนพื้นที่



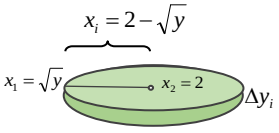
รูปที่ 6.46 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ทำการตัดปริมาตรมาเป็นตัวอย่าง หรือ ΔV_i

จากสมการเส้นโค้ง $y = x^2$

ดังนั้น $x = \sqrt{y}$



รูปที่ 6.47 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

4. แทนค่าต่าง ๆ ในสูตรของการหาปริมาตรของทรงตันทั้งหมด

$$V = \int_0^4 \pi(x_2 - x_1)^2 dy$$

$$= \int_0^4 \pi(2 - x)^2 dy$$

5. หาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันเส้นโค้งจากการแทน

$$V = \int_0^4 \pi(2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(2^2 - 2(2)\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(4 - 4\sqrt{y} + y\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(4 - 4y^{\frac{1}{2}} + y\right) dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{4y^{\frac{3}{2}}}{3}(2) + \frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[4y - \frac{8y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi\left(\left(4(4) - \frac{8(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4^2}{2}\right) - \left(4(0) - \frac{8(0)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{0^2}{2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(16 - \frac{8(\sqrt{4^3})}{3} + \frac{16}{2}\right)$$

$$= \pi\left(16 - \frac{8(\sqrt{4 \times 4 \times 4})}{3} + 8\right)$$

$$= \pi\left(24 - \frac{64}{3}\right)$$

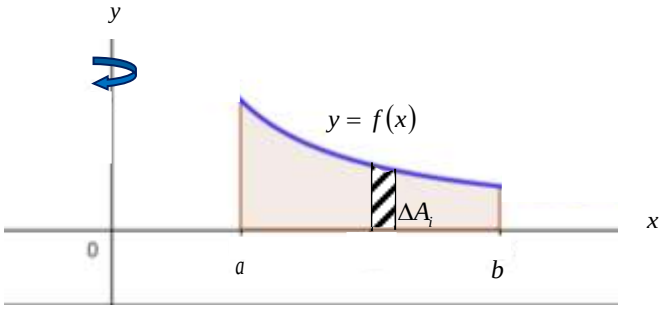
$$= \frac{8}{3}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

6.3.2 การหาปริมาตรของทรงตันโดยใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก

เป็นวิธีการหาปริมาตรของทรงตันโดยตัดทรงตันให้เป็นทรงกระบอกกลวง ให้ขนานกับแกนหมุน โดยแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนขนานกับแกน x โดยหมุนรอบแกน y

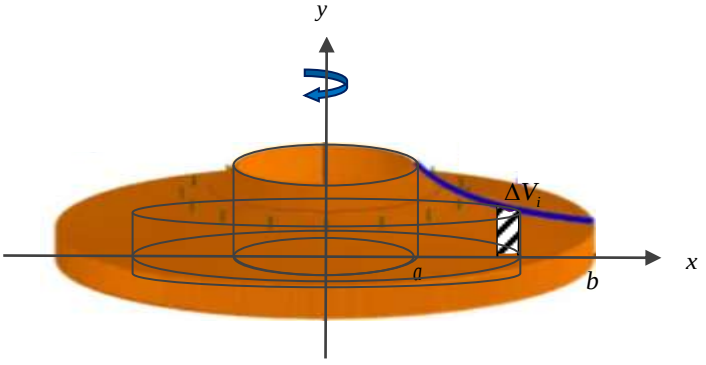
ให้ $y = f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = f(x)$ แกน x $x = a$ และ $x = b$ รอบแกน y ดังรูปที่ 6.48



รูปที่ 6.48 พื้นที่ A

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ให้ V เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน y (แกน y คือแกนหมุน) และให้ ΔV_i เป็นปริมาตรของรูปทรงกระบอกที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y ซึ่งเป็นลักษณะทรงกระบอกกลวง ดังรูปที่ 6.49



รูปที่ 6.49 ปริมาตร V

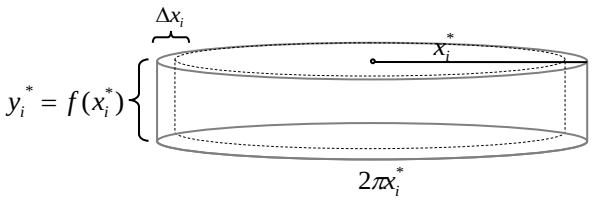
ที่มา: ดัดแปลงมาจาก https://www.storyofmathematics.com/ (2564)

การหาปริมาตรทรงตันทั้งหมด V โดยการแบ่งทรงตันออกเป็น n ส่วนย่อย ๆ โดยกำหนดให้ x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางของแต่ละส่วน และสร้างสี่เหลี่ยมบนส่วนย่อย คือ ΔA_i จะมีฐานกว้างเท่ากับ $x_i - x_{i-1}$ และส่วนสูง $f\left(x_i^*\right)$ ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันทั้งหมด V คือ

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

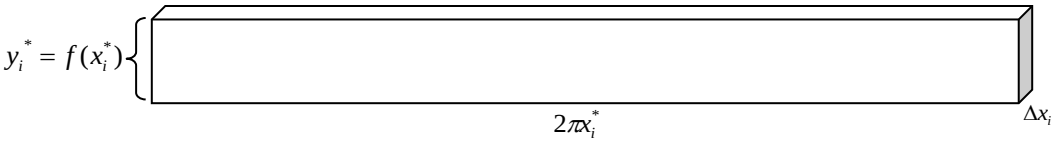
กรณีที่แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ส่วน และให้ $n \to \infty$ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \to V$ สามารถพิจารณา ΔV_i ได้จากสูตรปริมาตรของลูกบาศก์ที่มีความกว้างเท่ากับ y_i^*, ความยาวเท่ากับ $2\pi x_i^*$ และความหนาเท่ากับ Δx_i ดังรูปที่ 6.50



รูปที่ 6.50 ปริมาตร ΔV_i

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หากคลี่แผ่นเส้นรอบวงออก ซึ่งคล้ายกับการตัดม้วนริบบิ้น ดังรูปที่ 6.50



รูปที่ 6.51 ปริมาตร ΔV_i โดยคลี่แผ่นเส้นรอบวงออก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร $\Delta V_i = 2\pi x_i^* y_i^* \Delta x_i$

$$= 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right) \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

$$\therefore V = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)dx$$

<u>กรณีที่ 2</u> ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนขนานกับแกน y โดยหมุนรอบแกน x ในทำนองเดียวกัน

ให้ $x = f(y)$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย A เป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $x = f(y)$, แกน y, $y = a$ และ $y = b$ รอบแกน x จะได้

$$\therefore V = \int_a^b 2\pi\, y\, f(y)dy$$

หรือในการหาสูตรปริมาตรของทรงตัน เขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$V = \int_a^b 2\,\pi\, r\, h \times \text{ความหนา}$$

โดยที่ r คือ รัศมี และ h คือ ความสูง

ตัวอย่าง 6.10 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$ รอบแกน y โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u> หมุนรอบแกน y จะได้จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองเส้น คือ $(0,0)$ และ $(2,4)$

หาจุดตัดของเส้นโค้งทั้ง 2 เส้น

จากสมการเส้นโค้ง $y = x^2$ (1)

$y^2 = 27x$ (2)

แทนค่า $y = x^2$ ในสมการที่ (2)

ดังนั้น $(x^2)^2 = 27x$

$x^4 = 27x$

$x^4 - 27x = 0$

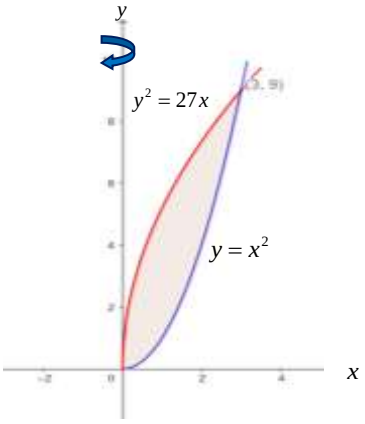
$x(x^3 - 27) = 0$

$x = 0$ หรือ $x^3 - 27 = 0$

$x^3 = 27$

$x = 3$

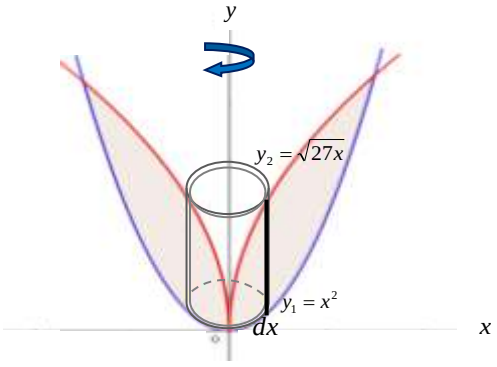
แทน $x = 0$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y = 0$ และแทน $x = 3$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y = 9$



รูปที่ 6.52 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จุดตัดของเส้นโค้งทั้ง 2 เส้น คือ (0, 0) และ (3, 9)



รูปที่ 6.53 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร $V = \int_0^3 2\pi x(y_2 - y_1)\,dx$

$$= 2\pi\int_0^3 x(\sqrt{27x} - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^3 (x\sqrt{27}\sqrt{x} - x\cdot x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^3 (3\sqrt{3}x(x)^{\frac{1}{2}} - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^3 (3\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}} - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[3\sqrt{3}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$= 2\pi\left(3\sqrt{3}\,\frac{(3)^{\frac{5}{2}}}{5}2 - \frac{3^4}{4}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{162}{5} - \frac{81}{4}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{648-405}{20}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{243}{10}\right) = \frac{243}{10}\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

ตัวอย่าง 6.11 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x-1$ เส้นตรง $y = 3-x$ และแกน x รอบเส้นตรง $y = -1$ โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดของเส้นโค้ง $y^2 = x-1$ และเส้นตรง $y = 3-x$

จากสมการเส้นโค้ง $y^2 = x-1$ (1)

และเส้นตรง $y = 3-x$ (2)

แทนค่า $y = 3-x$ ในสมการที่ (1)

$$(3-x)^2 = x-1$$

$$(3)^2 - 2(3)x + x^2 = x-1$$

$$9-6x+x^2 = x-1$$

$$x^2-6x+9 = x-1$$

$$x^2-6x+9-x+1=0$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

ดังนั้น $x = 2,\ 5$

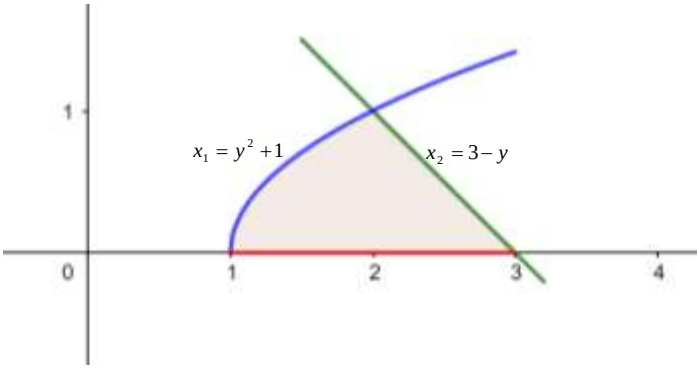
แทน $x=2$ ในสมการที่ (2) จะได้ $y=1$ และแทน $x=5$ ในสมการที่ (1) จะได้ $y=-2$

จากสมการเส้นโค้ง $y^2 = x-1$

$\therefore\ x_1 = y^2+1$

และเส้นตรง $y = 3-x$

$\therefore\ x_2 = 3-y$



รูปที่ 6.54 พื้นที่ของเส้นโค้ง $y^2 = x-1$ เส้นตรง $y = 3-x$ และแกน x

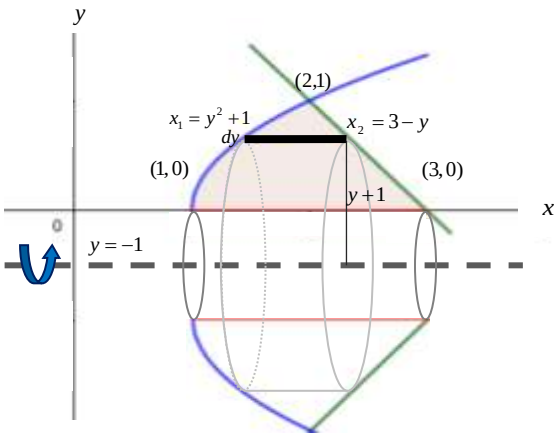
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หาจุดตัดของเส้นตรง $y = 3-x$ และแกน x (หรือ $y=0$)

จากสมการเส้นตรง $y = 3-x$ (1)

และเส้นตรง $y = 0$ (2)

แทน $y=0$ ในสมการที่ (1) จะได้ $x=3$



รูปที่ 6.55 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ เส้นตรง $y = 3 - x$ และแกน x

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ดังนั้น ปริมาตร

$$V = \int_0^1 2\pi(y+1)(x_2 - x_1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(x_2 - x_1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)((3-y) - (y^2+1))\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(3 - y - y^2 - 1)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (y+1)(2 - y - y^2)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2y - y^2 - y^3 + 2 - y - y^2)\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (-y^3 - 2y^2 + y + 2)\,dy$$

$$= 2\pi\left[-\frac{y^4}{4} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right]_0^1$$

$$V = 2\pi\left(\left(-\frac{1^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2(1)\right) - 0\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6} + 2\cdot\frac{12}{12}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{-3-8+6+24}{12}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{19}{12}\right)$$

$$= \frac{19}{16}\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

บทสรุป

การประยุกต์ของปริพันธ์มีความสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างแท้จริง เช่น การหาพื้นที่ พื้นผิว ไม่ว่าจะเป็นระหว่างเส้นตรงกับเส้นโค้ง หรือเส้นโค้งกับเส้นโค้งของรูปแบบ 2 มิติ หรือในรูปลักษณะของเส้นแบบอื่น ๆ และในการหาปริมาตรของทรงตัน 3 มิติ ที่ไม่สามารถคำนวณหาได้จากสูตรใด ๆ ได้ตามปกติ แก้ปัญหาโดยใช้วิธีจานและวิธีเปลือกทรงกระบอก ภายใต้การใช้ปริพันธ์แบบจำกัดเขตจากการวาดกราฟ ทั้งยังมีการอธิบายจากการใช้โปรแกรม GeoGebra Classic หรือ GeoGebra Application แบบออนไลน์เบื้องต้น ควบคู่ในระหว่างการศึกษาเรียนรู้เพิ่มเติมนอกจากทฤษฎีเท่านั้น จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับนักศึกษาหรือบุคคลทั่วไปที่สนใจ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int_0^1 2x(4-x^2)\,dx$

1.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$

1.3 $\int_{-1}^{2} x^2 e^{x^3+1}\,dx$

1.4 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

1.5 $\int_0^4 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

1.6 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

1.7 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$

1.8 $\int_0^2 x^3\sqrt{16-x^4}\,dx$

1.9 $\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x}{\cos x+2}\,dx$

1.10 $\int_1^2 \frac{4}{9x^2+6x+1}\,dx$

2. จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งหรือเส้นตรงที่กำหนดให้

1. $y=x^2$ และ $y=\sqrt{x}$
2. $x=y^2$ และ $x=2-y^2$
3. $y^2-2x=0$ และ $y^2+4x-12=0$
4. $y=x^3-6x^2+8x$ และแกน x

5. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$ และ $x = 2$
6. $y = x^2 + 4$, $y = 10 - x$,แกน x และแกน y
7. $y = 6x - x^2$ และ $y = x^2 - 2x$
8. $y = 3 - x$ และ $y = x^2 - 9$
9. $x = y^2$, $x = y^2 + 2$, $y = -3$ และ $3y - x = 0$
10. $y = x^3$, $y = -x$ และ $3x - 2y + 10 = 0$

3. จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย

1. $y = x^2$, $x = 0$ และ $y = 1$ หมุนรอบแกน x
2. $y = x$ และ $y = x^2$ หมุนรอบแกน y
3. $x = y^2$, $y = 2$ และ $x = 0$ หมุนรอบแกน y
4. $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$ และ $x = 1$ หมุนรอบแกน y
5. $y = x^2 - x$ และ $y = 0$ หมุนรอบแกน x
6. $y = x^2$ และ $y = x$ หมุนรอบแกน y
7. $y^2 = 2x$ และ $2y = x$ หมุนรอบแกน x
8. $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$ และ $y = 2$ หมุนรอบแกน y
9. $y = x^2$ และ $y = \sqrt[3]{x}$ หมุนรอบแกน y
10. $y = x^3$ และ $y = x^2$ หมุนรอบแกน x
11. $y = \frac{1}{4}x^3 + 2$, $y = 2 - x$ และ $x = 2$ หมุนรอบแกน y
12. $y = x^2$ และ $y = x$ หมุนรอบแกน x
13. $y = x^3$, $x = 0$ และ $y = 1$ โดยหมุนรอบเส้นตรง

    1) $x = 1$ 2) $y = 1$

3) $x=-1$ 4) $y=2$

14. $y=\sqrt{x}$, $x=0$ และ $y=1$ โดยหมุนรอบเส้นตรง

1) $x=1$ 2) $y=1$

3) $x=-1$ 4) $y=2$

15. $y^2=x^3$, $x=4$ และแกน x โดยหมุนรอบเส้นตรง

1) $x=4$ 2) $y=8$

เอกสารอ้างอิง

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). **พจนานุกรมศัพท์คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

GeoGebra for Teaching and Learning Math., **GeoGebra Classic**. https://www.geogebra.org/classic (2564)

Story of Mathematics., **Calculus**. https://www.storyofmathematics.com. (2564)

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.